

The evolution of a curve induced by the Pohlmeyer-Lund-Regge equation

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
古郷優平 (Yuhei KOGO) *

概要

本講演では、幾何学や場の理論への応用を持つ sine-Gordon 方程式を一般化した可積分系である Pohlmeyer-Lund-Regge (PLR) 方程式に従う空間曲線の時間発展について考察する。Frenet 枠と関連する微分方程式を使用し、Lund-Regge 条件における空間曲線の曲率と捩率の時間発展を記述する方程式を導出する。次に、これらの方程式を 2×2 の行列表現に置き換えて再定式化し、Frenet 枠の時間発展と PLR 方程式の Lax ペアとの間の対応を示す。この定式化では、非線形シュレディンガー方程式で使用される橋本変換に類似した複素関数が導入される。最後に、伊達悦朗により得られた N-ソリトン解を示し、それらが生成する曲線と曲面を具体的に構成する。本講演は、北海道大学的小林真平氏、福岡大学の松浦望氏との共同研究によるものである。

1 導入

1978 年に Lund と Regge は sine-Gordon 方程式のある種の一般化を発見し、空間曲線の時間発展で次の非線形偏微分方程式を満たすものとして定式化した [2](Lund-Regge 条件)。

$$\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma}$$

ここで、空間曲線を γ とし、 γ のパラメータ方向の微分を $'$ 、時間発展方向の微分を $\dot{}$ で表した。この方程式は、Pohlmeyer[3] により独立に、可積分系の理論より導出され、Pohlmeyer-Lund-Regge(PLR) 方程式として知られている。1982 年に伊達悦朗 [1] は、Krichever の方法の拡張を適用して PLR 方程式の多ソリトン解および準周期解を構成し、Cramer の方法を通じて特別な線型方程式を解くことで N ソリトン解を構成する方法を導入した。この構成法は、「伊達の直接法」と呼ばれている。

本講演では、Lund-Regge 条件を適用した空間曲線の時間発展を考え、 2×2 行列値 Frenet 枠 ($\mathbb{R}^3$ と $\mathfrak{su}(2)$ を同一視して、 $SU(2)$ に値を持つとする) の時間発展を与える方程式と、それに伴う曲率 κ 、捩率 τ の満たす連立偏微分方程式を導出する。また、橋本変換の類似として複素関数 $q = \kappa \exp(i \int^s (\tau - 1) ds)$ を定義し、適切なゲージ変換を用いることで、Frenet 枠の時間発展が、PLR 方程式の Lax 形式と一致することを示す。この対応により、複素関数 q が以下の非線形偏微分

* E-mail: yh1123.kg.5813@eis.hokudai.ac.jp

方程式を満たすことがわかる．

$$\dot{q}' + \frac{1}{2}q \int^s (|q|^2)' ds = 0,$$

これは、非線形 Schrödinger 方程式に類似した方程式である．さらに Lax 形式の解の対数微分を調べること (Sym の公式として知られる) により、Lund-Regge 条件を満たす空間曲線の時間発展を構築することが可能である．さらに、伊達の直接法により得られた PLR 方程式の N ソリトン解に対応する曲線の表現公式、および曲線や曲線を動かしてできる曲面が明示的に構成できる．

2 主定理

定理 2.1. 3次元ユークリッド空間内の空間曲線 γ の時間発展を次で定める．

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} - (\tau - 1) \int^s \dot{\tau} ds \right) T - \dot{\kappa} N - \kappa \int^s \dot{\tau} ds B.$$

ここで T は単位接ベクトル、 N は単位法線ベクトル、 B は単位陪法線ベクトルである．フレネ枠 $\mathcal{F}$ は、連立線型微分方程式系 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\mathcal{L}$, $\dot{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\mathcal{M}$ を満たし、係数行列は次で与えられる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\tau & -\kappa \\ \kappa & -i\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{i}{\kappa} (m'_{31} + m_{21}\tau) & -m_{21} - im_{31} \\ m_{21} - im_{31} & -\frac{i}{\kappa} (m'_{31} + m_{21}\tau) \end{pmatrix},$$

ここで m_{21} , m_{31} は次で与えられる．

$$m_{21} = \kappa \int^s \dot{\tau} ds, \quad m_{31} = - \left(\kappa \int^s \dot{\tau} ds \right)' - \dot{\kappa}\tau.$$

この時、連立線型微分方程式系の可積分条件は

$$\left(\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} - (\tau - 1) \int^s \dot{\tau} ds \right)' + \kappa \dot{\kappa} = 0, \quad \left(\kappa \int^s \dot{\tau} ds \right)' + \dot{\kappa}(\tau - 1) = 0$$

であり、曲線 γ は *Lund-Regge* 条件 $\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma}$ を満たす．逆に、*Lund-Regge* 条件を満たす空間曲線 γ は、上の連立偏微分方程式系および可積分条件を満たす．

系 2.2. 適切なゲージ $\mathcal{D}$ を取り、次の複素関数を導入する：

$$q = \kappa \exp \left(i \int (\tau - 1) ds \right). \quad (2.1)$$

ゲージされた *Frenet* 枠 $F = \mathcal{F}\mathcal{D}$ と定理 2.1 における $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ は次のように書き換えられる：

$$\begin{cases} F' = FL \\ \dot{F} = FM \end{cases}, \quad \text{ここで} \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & q \\ -\bar{q} & -i \end{pmatrix}, \quad M = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(\dot{q}/q) & -\dot{q} \\ -\dot{\bar{q}} & \operatorname{Re}(\dot{q}/q) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

この時、この連立線型方程式系の可積分条件は $\{\operatorname{Re}(\dot{q}/q)\}' = -\frac{1}{2}(|q|^2)'$, $\operatorname{Im}(\dot{q}/q) = 0$ であり、これは次の非線形偏微分方程式と同値である：

$$\dot{q}' + \frac{1}{2}q \int^s (|q|^2)' ds = 0. \quad (2.3)$$

3 Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式

Lund-Regge 条件を満たす曲線の表現公式を導入するために、Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式の Lax 表示について紹介する。以降 $'$ は s 微分, $\dot{}$ は t 微分を表すこととする。

(2×2) 行列値関数 Ψ を, 次の連立偏微分方程式系を満たすものとする (Lax ペア) :

$$\Psi^{-1}\Psi' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\lambda & a \\ -\bar{a} & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}\dot{\Psi} = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -\exp(i\omega) \sin u \\ -\exp(-i\omega) \sin u & -\cos u \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

ここで λ は, $\mathbb{C}^\times$ に値をとる定数 (spectral parameter) で, u は 2 変数実数値関数であるとする。さらに, 2 変数複素数値関数 a と 2 変数実数値関数 ω は, u と新たな 2 変数実数値関数 v を用いて次で定義される :

$$a = -\frac{\{\exp(i\omega) \sin u\}'}{\cos u}, \quad \omega' = \frac{v' \cos u}{2 \cos^2(u/2)}, \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{\cos^2(u/2)}. \quad (3.2)$$

ここで $0 < u < \pi/2$ を仮定している。この時, Lax ペアの Compatibility condition が次の Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式 [1, (0.2)]:

$$\dot{u}' - \frac{v' \dot{v} \sin(u/2)}{2 \cos^3(u/2)} + \sin u = 0, \quad v' + \frac{u' \dot{v} + \dot{u} v'}{\sin u} = 0, \quad (3.3)$$

となる。もし (3.3) の関数 v が定数であるとする, 方程式 (3.3) は, sine-Gordon 方程式 :

$$\dot{u}' + \sin u = 0. \quad (3.4)$$

に退化する。Lax ペアに現れる行列値関数 Ψ のことを波動関数と呼ぶ。

次に伊達の N-ソリトン解について紹介する。波動関数 $\Psi(s, t, \lambda) = (\Psi_{jk}(s, t, \lambda))_{1 \leq j, k \leq 2}$ が次の形で書けることを仮定する。

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(s, t, \lambda) &= \left(\lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \psi_{1j}(s, t) \lambda^j \right) \exp \left\{ \frac{i}{2} (\lambda s + \lambda^{-1} t) \right\}, \\ \Psi_{21}(s, t, \lambda) &= - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \psi_{2j}(s, t) \lambda^j \right) \exp \left\{ -\frac{i}{2} (\lambda s + \lambda^{-1} t) \right\}, \\ \Psi_{12}(s, t, \lambda) &= -\overline{\Psi_{12}(s, t, \bar{\lambda})}, \quad \Psi_{22}(s, t, \lambda) = \overline{\Psi_{11}(s, t, \bar{\lambda})}, \end{aligned}$$

ここで $\psi_{ij}(s, t)$ ($i = 1, 2, j = 0, \dots, N-1$) は, λ に依存しない複素数値関数で, パラメータ α_j, c_j は, 次を満たす。

$$\begin{cases} \alpha_j (1 \leq j \leq N) : \text{全ての } j \text{ に対して } \operatorname{Im} \alpha_j \text{ が同符号で, かつ互いに異なる複素数,} \\ c_j (1 \leq j \leq N) : \text{任意の複素数.} \end{cases}$$

そして, $\psi = (\psi_{10}, \dots, \psi_{1,N-1}, \psi_{20}, \dots, \psi_{2,N-1})^T \in \mathbb{C}^{2N}$ を次の線型方程式の解とする

$$T_0 \psi = b. \quad (3.5)$$

$2N$ ベクトル b は次で定義 :

$$b = - \left((\alpha_1)^N e(\alpha_1), \dots, (\alpha_N)^N e(\alpha_N), (\bar{\alpha}_1)^N \bar{c}_1 e(\bar{\alpha}_1), \dots, (\bar{\alpha}_N)^N \bar{c}_N e(\bar{\alpha}_N) \right)^T,$$

ここで $e(\lambda) = \exp(\frac{i}{2}(\lambda s + \lambda^{-1}t))$. さらに $(2N \times 2N)$ 行列 T_0 は次で定義:

$$T_0 = \begin{pmatrix} EA & -CE^{-1}A \\ \overline{CE^{-1}A} & \overline{EA} \end{pmatrix},$$

ここで $(N \times N)$ 行列 A, E, C は, 次で定義:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & (\alpha_1)^1 & \cdots & (\alpha_1)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\alpha_N)^1 & \cdots & (\alpha_N)^{N-1} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e(\alpha_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & e(\alpha_N) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & c_N \end{pmatrix}.$$

パラメータ α_j に対する条件の下で, 線型方程式 (3.5) の係数行列は逆行列を持つ. 実際, クラメルの方法より, 関数 ψ_{ij} は, 次のように具体的に書ける.

$$\psi_{1j}(s, t) = \frac{\det T_{j+1}}{\det T_0} = \frac{d_{j+1}}{d_0}, \quad \psi_{2j}(s, t) = \frac{\det T_{N+j+1}}{\det T_0} = \frac{d_{N+j+1}}{d_0}, \quad (3.6)$$

$j = 0, \dots, N-1$, ここで T_k は, T の k 列目を b で置き換えた行列を表し, d_j はその行列式とする. つまり

$$d_j = \det T_j, \quad (j = 0, \dots, N).$$

伊達の論文 [1, section 3] より, パラメータ $\alpha_1, \dots, \alpha_N, c_1, \dots, c_N$ は, 次の条件を満たす波動関数 $\Psi(s, t, \lambda)$ を一意に定める:

$$(1, c_j)\Psi(s, t, \alpha_j) = 0, \quad (j = 1, \dots, N).$$

さらに $\Psi(s, t, \lambda)$ は次の連立方程式系を満たすことがわかる:

$$\begin{cases} \Psi^{-1}\Psi' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\lambda & i\overline{d_{2N}/d_0} \\ id_{2N}/d_0 & -i\lambda \end{pmatrix}, \\ \Psi^{-1}\dot{\Psi} = \frac{i}{2\lambda(|d_1|^2 + |d_{N+1}|^2)} \begin{pmatrix} |d_1|^2 - |d_{N+1}|^2 & 2\overline{d_1 d_{N+1}} \\ 2d_1 d_{N+1} & -|d_1|^2 + |d_{N+1}|^2 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式の Lax ペア (3.1) と (3.7) を比較すると, Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式 (3.3) の解が次で与えられる:

$$a = i\overline{\left(\frac{d_{2N}}{d_0}\right)}, \quad u = \arccos\left(\frac{|d_1|^2 - |d_{N+1}|^2}{|d_1|^2 + |d_{N+1}|^2}\right), \quad v = 2 \arg\left(\frac{d_{N+1}}{d_0}\right) + v_0, \quad (v_0 \in \mathbb{R}). \quad (3.8)$$

さらに $\Psi(s, t, \lambda)$ は, (3.1) を満たす.

パラメータ α_j, c_j を, 次の条件を満たす $\{1, \dots, N\}$ の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$

$$\overline{\alpha_j} = -\alpha_{\sigma(j)}, \quad \overline{c_j} = -c_{\sigma(j)}, \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3.9)$$

が存在するように選ぶとき, d_j は次を満たす:

$$\frac{d_k}{d_0} = \overline{\left(\frac{d_k}{d_0}\right)}, \quad (k = 1, \dots, 2N). \quad (3.10)$$

この時間関数 v は, (3.8) の第 3 式から定数である. よって関数 u は sine-Gordon 方程式の解である.

いまの話と, (2.2) を合わせて次の系を得る.

系 3.1. 式 (2.1) の形であらわされる複素数値関数 q は、式 (3.2) であらわされる複素数値関数 a と同一視できる。つまり、 q は *Pohlmeyer-Lund-Regge* 方程式の解を与える。したがって (2.2) のゲージされた *Frenet* 枠 F は、定数行列倍を除いて $\lambda = 1$ での (3.1) の波動関数 Ψ と一致する。つまり、ある $F_0 \in \text{SU}(2)$ が存在して $F_0 F = \Psi$ とできる。さらに、関数族 $\{F^\lambda\}_{\lambda>0}$ で $F^\lambda|_{\lambda=1} = F_0 F$ かつ次の偏微分方程式系を満たすものが存在する。

$$\begin{cases} (F^\lambda)' = F^\lambda L^\lambda \\ (F^\lambda)^\cdot = F^\lambda M^\lambda \end{cases}, \quad L^\lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\lambda & q \\ -\bar{q} & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad M^\lambda = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} -\text{Re}(\dot{q}'/q) & -\dot{q} \\ -\dot{\bar{q}} & \text{Re}(\dot{q}'/q) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

4 Lund-Regge 条件を満たす曲線の表現公式

3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ を、次で $\mathfrak{su}(2)$ と同一視する。

$$(p \quad q \quad r)^T \in \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ir & -p - iq \\ p - iq & -ir \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2). \quad (4.1)$$

定理 4.1 (The representation formula). 複素数値関数 q を (2.3) の解、 2×2 行列値関数 $F(= F^\lambda)$ を (3.11) の解とする。ここで $\mathfrak{su}(2)$ -値写像を次で定義する：

$$\gamma = (\lambda \partial_\lambda F) F^{-1}|_{\lambda=1}. \quad (4.2)$$

この時、 $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{su}(2)$ の同一視のもとで、 γ は、 $|\gamma'| = 1$ で *Lund-Regge* 条件を満たす。逆に、*Lund-Regge* 条件を満たす曲線の時間発展はこの方法で得られる。

この表現公式を用いて、伊達の N ソリトン解に付随する曲線の具体的な表示を紹介する。

命題 4.2. 関数 $\Psi(s, t, \lambda)$ を、式 (3.7) を満たす (2×2) 行列値波動関数とし、複素数値関数 $e(s, t, \lambda)$, $f(s, t, \lambda)$, $g(s, t, \lambda)$ を次で定める：

$$e(s, t, \lambda) := \exp\left(\frac{i}{2}(\lambda s + \lambda^{-1}t)\right), \quad (4.3)$$

$$f(s, t, \lambda) := \Psi_{11}(s, t, \lambda)e(s, t, -\lambda) = \lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{d_{j+1}}{d_0} \lambda^j, \quad (4.4)$$

$$g(s, t, \lambda) := \Psi_{21}(s, t, \lambda)e(s, t, \lambda) = -\sum_{j=0}^{N-1} \frac{d_{N+j+1}}{d_0} \lambda^j, \quad (4.5)$$

ここで $\Psi_{ij}(s, t, \lambda)$, $(i, j = 1, 2)$ は、 $\Psi(s, t, \lambda)$ の (i, j) 成分で、 d_k , $(k = 0, \dots, 2N)$ は、(3.6) で与えたもの。この時 N -ソリトン解に付随する曲線 $\gamma(s, t) = (\gamma_1(s, t), \gamma_2(s, t), \gamma_3(s, t))$ は次で与えられる。

$$\gamma_1(s, t) = 2 \text{Re} \left[\frac{\bar{f} \partial_\lambda g - g \partial_\lambda \bar{f}}{f \bar{f} + g \bar{g}} e^2 \right] \Big|_{\lambda=1}, \quad (4.6)$$

$$\gamma_2(s, t) = -2 \text{Im} \left[\frac{\bar{f} \partial_\lambda g - g \partial_\lambda \bar{f}}{f \bar{f} + g \bar{g}} e^2 \right] \Big|_{\lambda=1}, \quad (4.7)$$

$$\gamma_3(s, t) = s - t + 2 \text{Im} \left[\frac{\bar{f} \partial_\lambda f + g \partial_\lambda \bar{g}}{f \bar{f} + g \bar{g}} \right] \Big|_{\lambda=1}, \quad (4.8)$$

ここで e, f, g はそれぞれ $e(s, t, \lambda), f(s, t, \lambda), g(s, t, \lambda)$ を表す。

次に、伊達の直接法により得られる Pohlemeyer-Lund-Regge, sine-Gordon 方程式の N ソリトン解に付随する曲線を、パラメータ $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ と $c_1, \dots, c_N$ をとり、表現公式を用いて作成し、その曲線の時間発展により得られる曲面を描画する。

例 4.3. 初めに 1, 2, 3-ソリトンに付随する曲面を図 1 に示す。

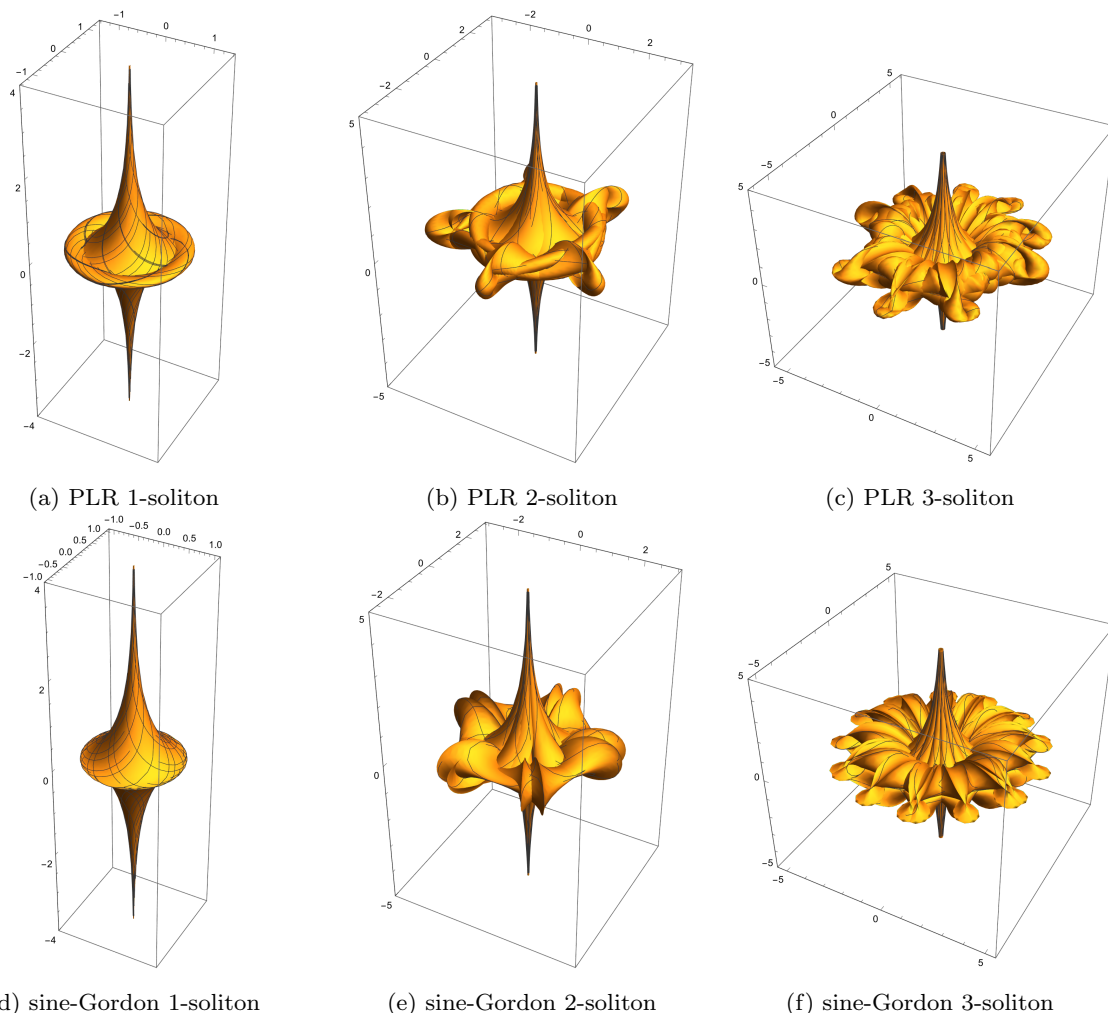


図 1: PLR, sine-Gordon 方程式の 1, 2, 3-ソリトン解による曲線の時間発展で得られる曲面

例 4.4 (4-soliton curves). パラメータを次でとる。

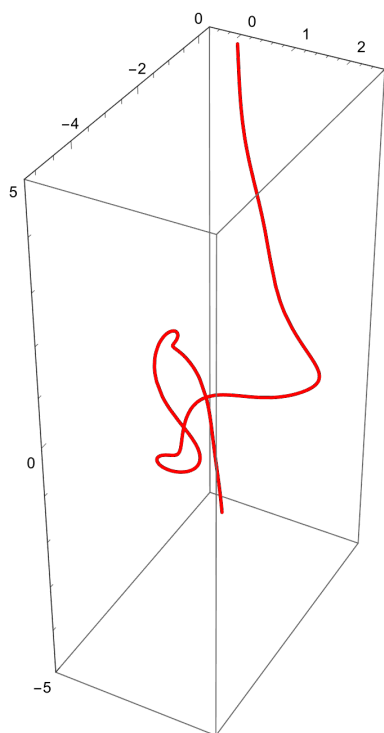
$$(c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}).$$

この時得られる PLR 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面を図 2 に示す。

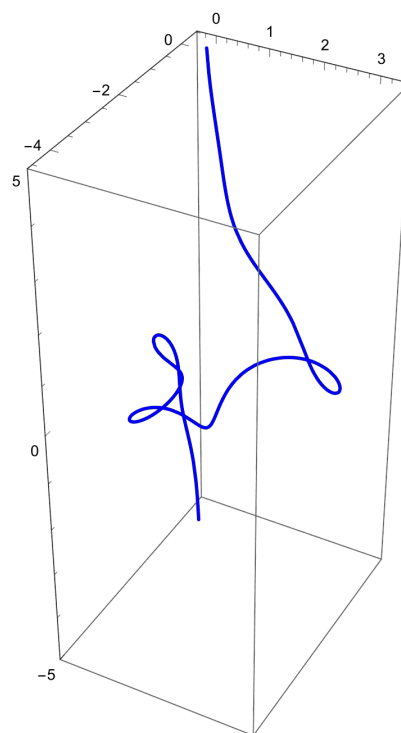
例 4.5 (4-soliton curves with sine-Gordon equation). パラメータを次でとる。

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}).$$

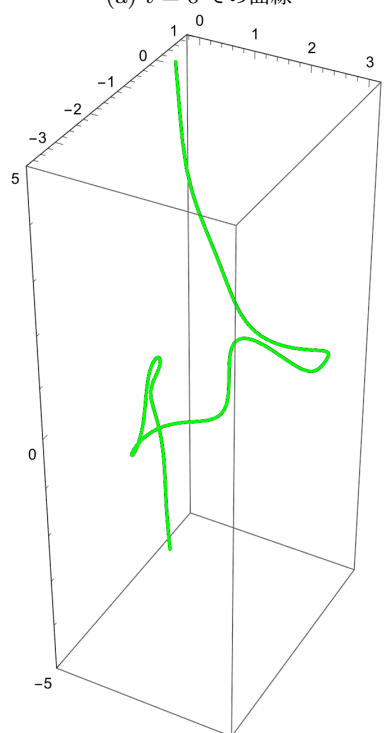
このとき、パラメータは、条件 (3.9) を満たす。sine-Gordon 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面を図 3 で示す。



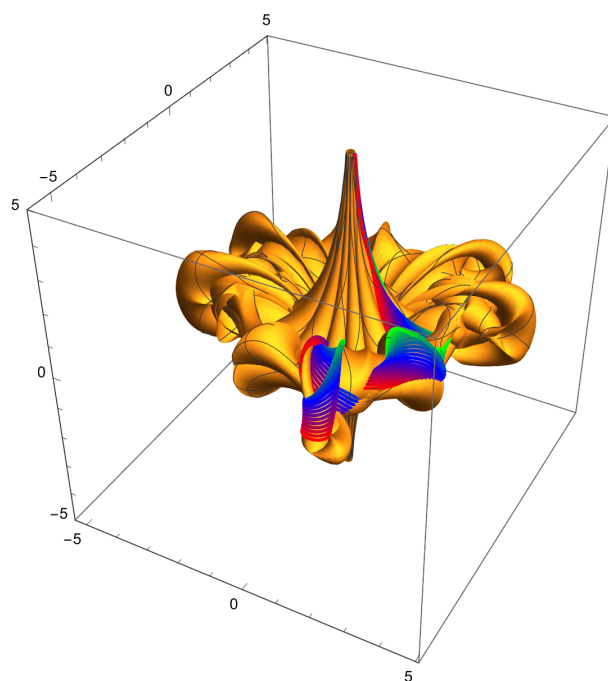
(a) $t = 0$ での曲線



(b) $t = 1$

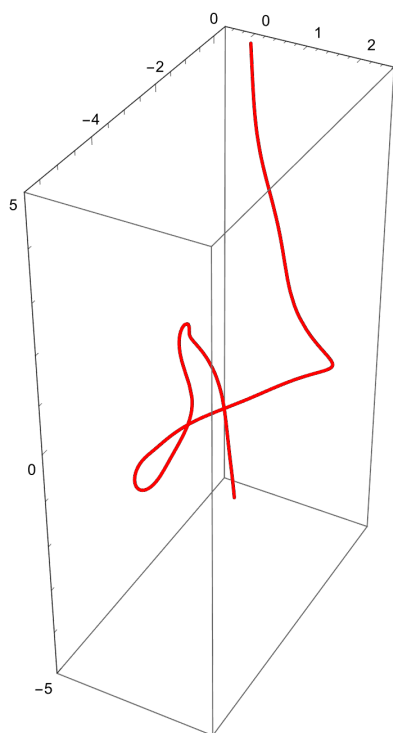


(c) $t = 2$

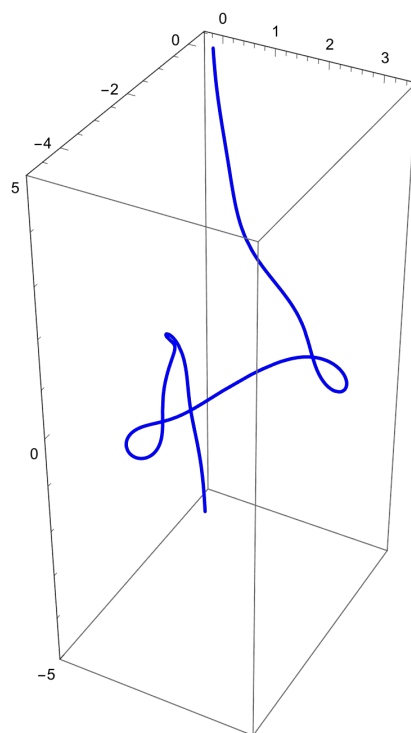


(d) 曲線 (a), (b), (c) とそれらを動かしてできる曲面

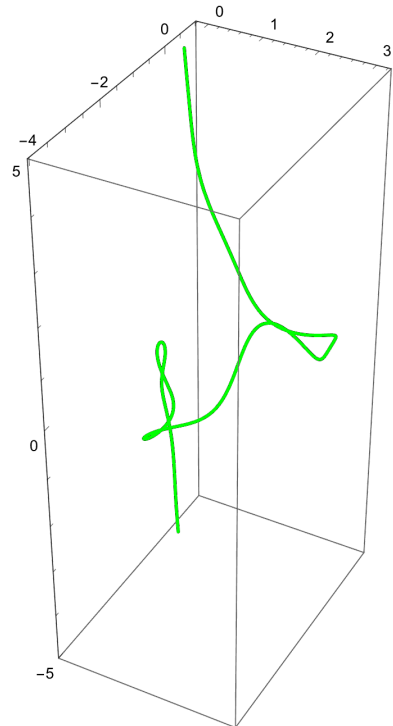
図 2: PLR 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面



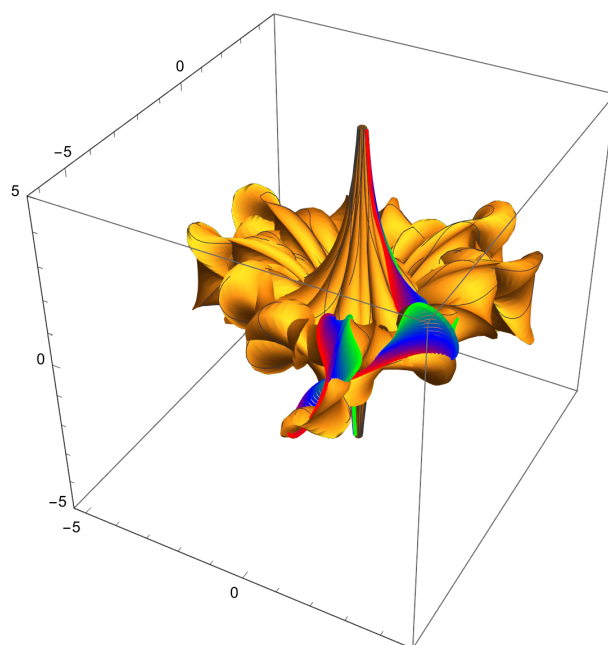
(a) $t = 0$ での曲線



(b) $t = 1$



(c) $t = 2$



(d) 曲線 (a), (b), (c) とそれらを動かしてできる曲面

図 3: sine-Gordon 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面

参考文献

- [1] E. Date. Multi-soliton solutions and quasi-periodic solutions of nonlinear equations of sine-Gordon type. *Osaka J. Math.* **19** (1982), 125–158.
- [2] F. Lund, T. Regge. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions. *Phys. Rev. D* **14**, no. 6 (1978), 1524–1535.
- [3] K. Pohlmeyer. Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints. *Comm. Math. Phys.* **46** (1976), 207–221.